

Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1*(Oral Banque PT)*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de six boules numérotées de 1 à 6.

Au début de l'expérience, il y a deux boules dans U_1 et quatre dans U_2 .

On dispose également d'un dé équilibré à six faces. À chaque étape on va lancer le dé puis on change d'urne la boule portant le même chiffre que le dé.

Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules dans U_1 après le lancer n .

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 5)$.
4. Soit $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de X_n .
5. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)$.
6. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et la limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2*(Banque PT, Maths A, 2023)*

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I_3 + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

On considère ici les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer N^2 et N^3 .

(b) Déterminer le rang de $A - I_3$.

(c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

- (d) Calculer PBP^{-1} .
 - (e) Déterminer une expression explicite de B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
 - (g) En déduire une expression explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Étude de $\mathcal{N}$.
- (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
 - (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.
 - (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.
3. Étude de $\mathcal{U}$.
- (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.
 - (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
 - (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

- (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, où B est la matrice définie à la question 1.
- (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
- (c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

- (d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \dots \times U}_{n \text{ fois}}$
 - (e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?
 - (f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.
5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique?
- (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

Exercice 3

(Banque PT, Maths C, 2014)

Partie I

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

1. (a) Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (\mathcal{E})$$

- (b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre ($\mathcal{E}_0$) associée à ($\mathcal{E}$).
- (c) Résoudre ($\mathcal{E}$) (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).
- (d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t et tout entier naturel n à l'aide d'une intégrale.

(e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

(f) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

2. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

(a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.

(b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul q :

$$u_q < e < v_q$$

(d) On cherche à montrer que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q , premiers entre eux, tels que :

$$e = \frac{p}{q}$$

En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e .

(e) On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

i. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|u_n - e| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ii. Montrer qu'il existe un rang, n_1 tel que pour tout entier $n \geq n_1$:

$$|w_n - e| \leq \varepsilon$$

iii. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

3. On considère la suite $(e_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie II

On considère la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. telle que :

$$g(0) = 0, \quad \forall x \in]0, 1] \quad g(x) = x \ln(x)$$

1. Étudier la continuité et les variations de la fonction g , puis tracer sa courbe représentative sur $[0, 1]$ sur le papier millimétré joint, en prenant pour unité 10 cm sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées

2. En déduire que $M = \sup_{x \in [0, 1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

3. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$ et pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.
5. Montrer que, pour tout réel $x \in [t_0, e^{-1}]$:

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}$$

7. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Nom :

